Environment Canada Environnement Canada

Histoire d'une inconsistance

Claude Girard
André Plante

10 avril 2015

L'onde de 'Schär'

Un problème théorique linéaire dont la solution stationaire analytique existe

Un profile de vent:

$$\mathbf{U} = 10\, ms^{-1}$$

Un profile de température:

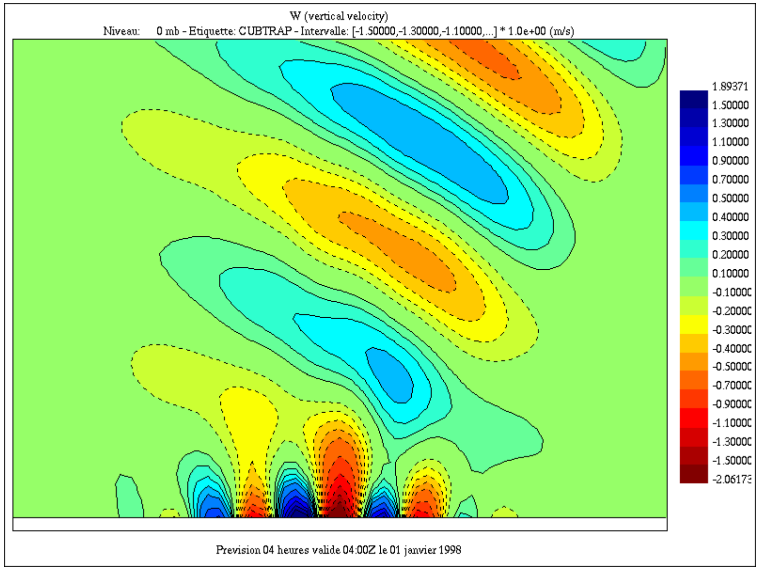
$$\mathbf{N} = 0.01 s^{-1}; \quad T_S = 288K$$

Une montagne, z_S ,

deux nombres non-dimensionels:

$$\mathbf{N}z_0 / \mathbf{U}; \quad \mathbf{N}a / \mathbf{U}$$

w(vitesse verticale)



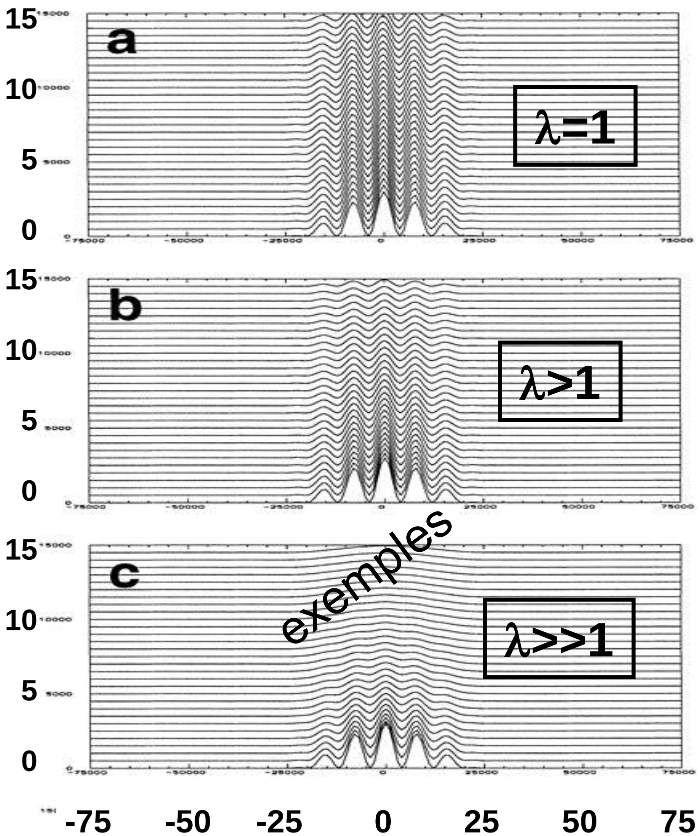
'zoom'

intervalles de contours: ~10 cm/s

A New Terrain-Following Vertical Coordinate Formulation for Atmospheric Prediction Models

Schär et al. MWR 2002

GEM en mode théorique: Courant d'air sur montagne idéalisée en deux dimensions: plan x-z



λ: **facteur d'aplatissement!**

Montage pour l'onde de Schär

$$H = 19.5km; \quad \mathbf{\Delta z = 300m}; \quad Nk = 65$$
$$L = 200km; \quad \Delta x = 500m; \quad Ni = 401$$

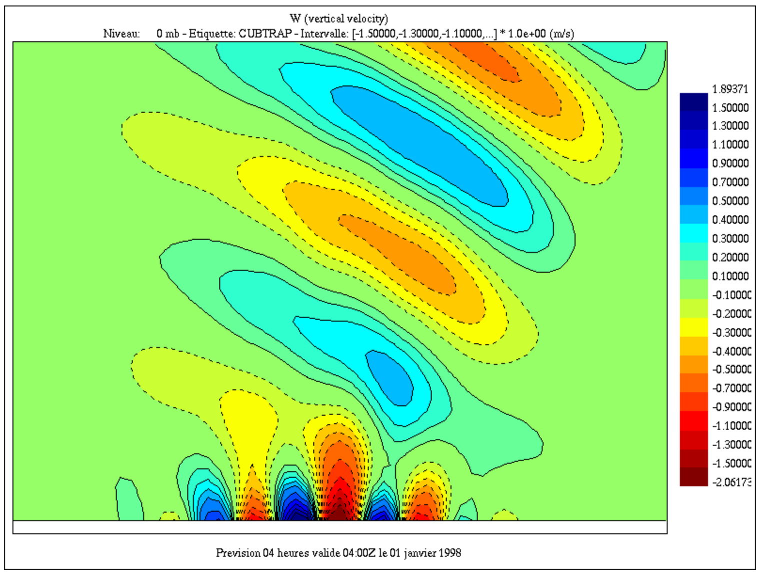
$$z_S = z_0 \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\cos^2\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)$$
$$z_0 = \mathbf{250\,m}$$
$$a = 5\,km$$
$$l_x = 4\,km = \mathbf{8\Delta}x$$

N.B. $z_0 < \Delta z$ **: problème linéaire**

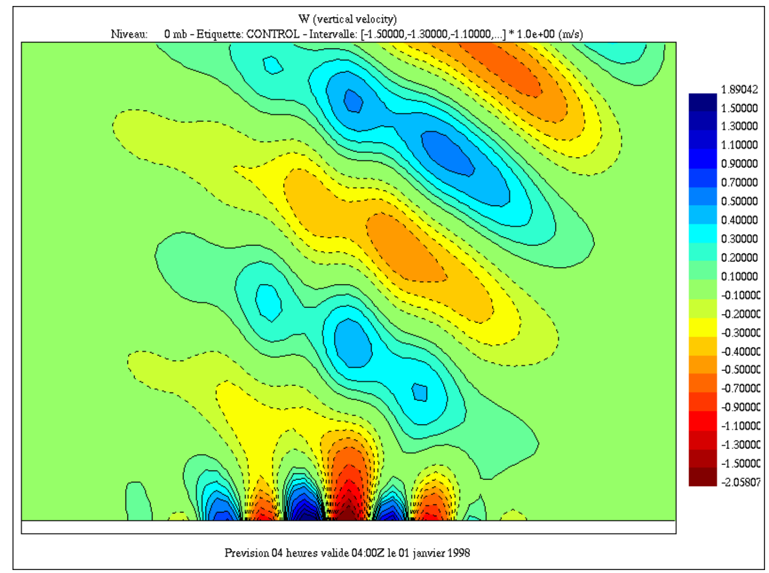
L'onde de 'Schär'

L'histoire

Solution correcte
depuis ~un an: fin 2013



Solution erronée (bosselée)
jusqu'à fin 2013



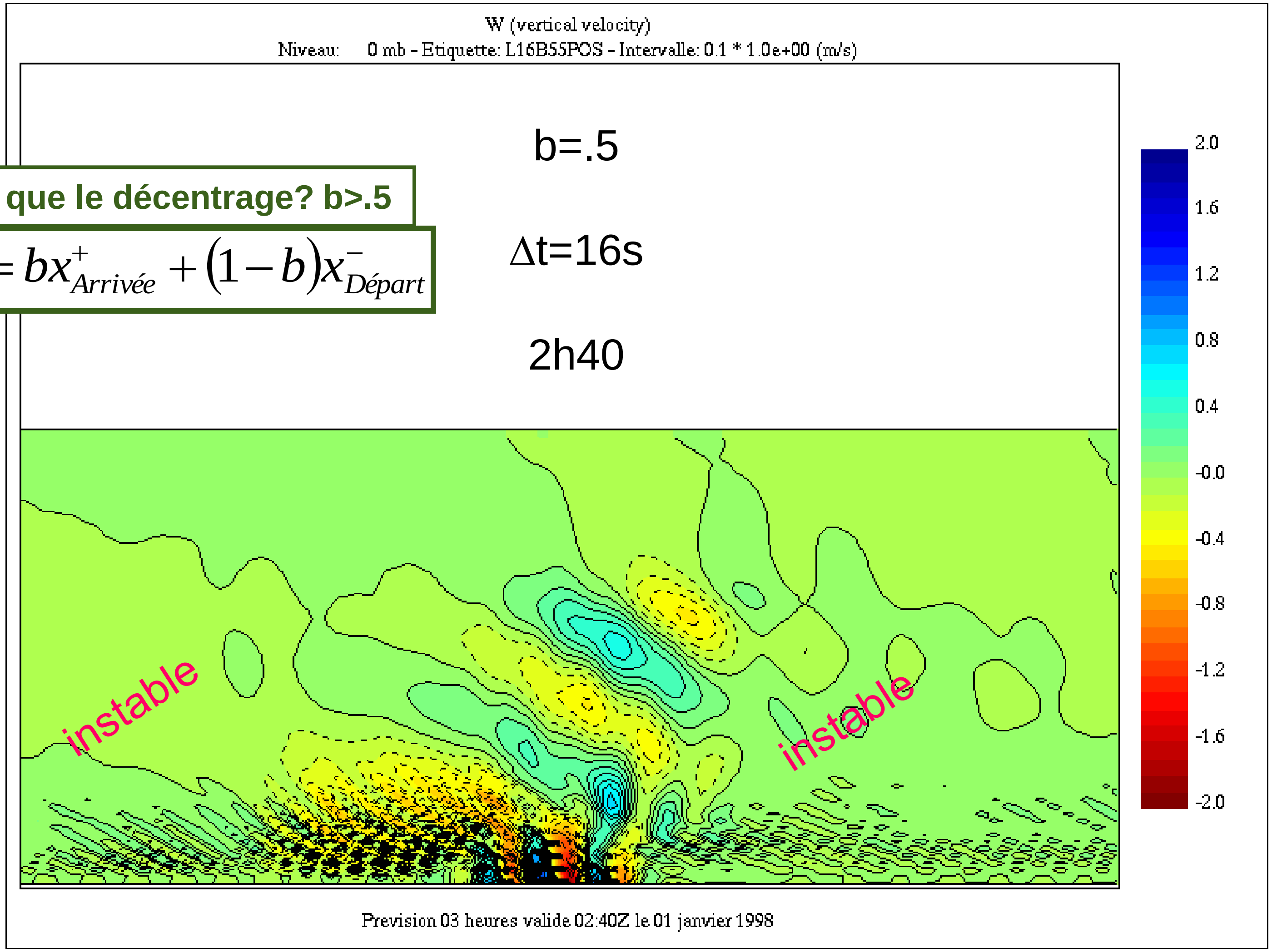
Une intégration de 4h avec 'éponge' près du toit, à l'entrée et à la sortie du domaine pour prévenir la réflexion d'ondes

L'onde de 'Schär'

La préhistoire : **instable sans décentrage jusqu'en 2010**

Qu'est-ce que le décentrage? b>.5

$$\bar{x}^{trajectoire} = b x^{+}_{Arrivée} + (1-b) x^{-}_{Départ}$$



L'onde de 'Schär'

Impact de λ et Δt

la préhistoire

λ=1 λ=10

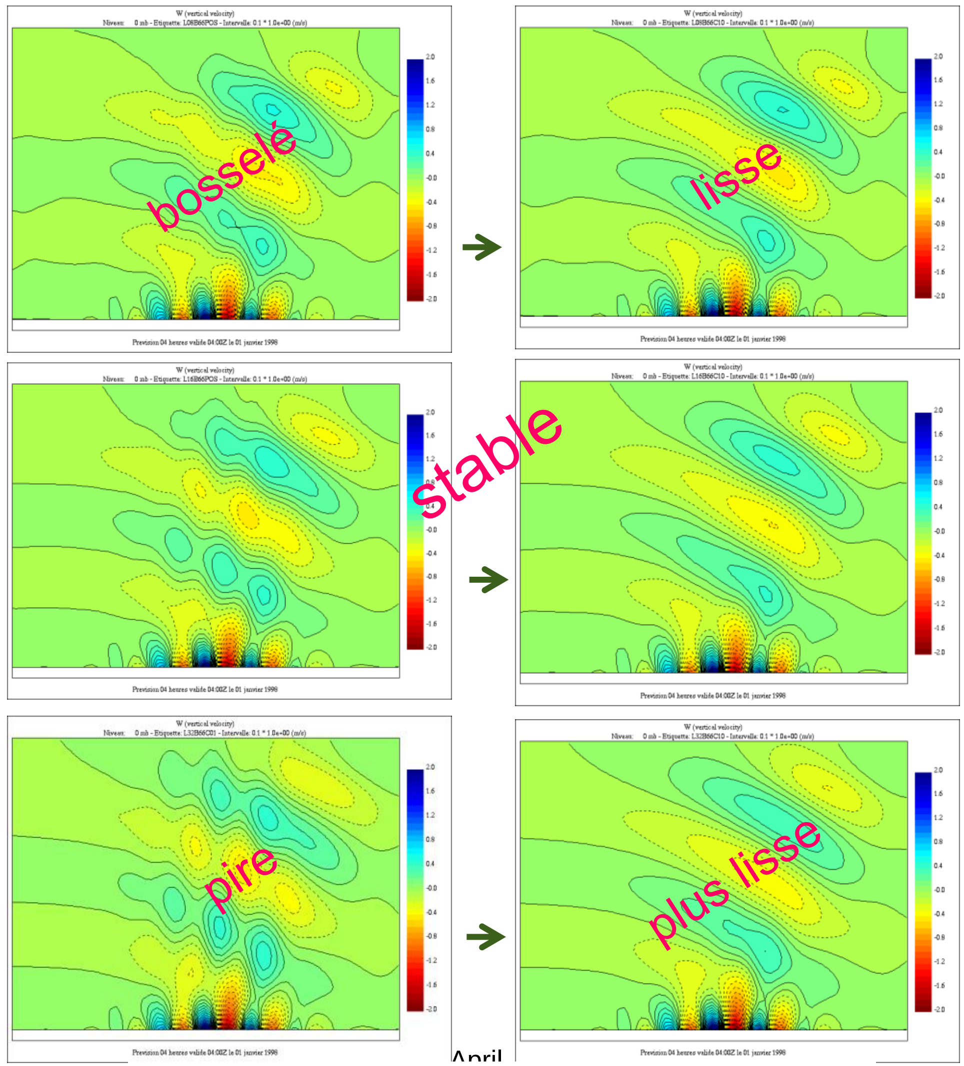
b=.6
4h

avec décentrage

Δt=8s

Δt=16s

Δt=32s



λ=Rcoef

λ: aplatissement de la coordonnée

$$\boxed{\frac{\partial \ln \pi}{\partial z} = -\frac{g}{RT}}$$

la préhistoire

L'onde de 'Schär'

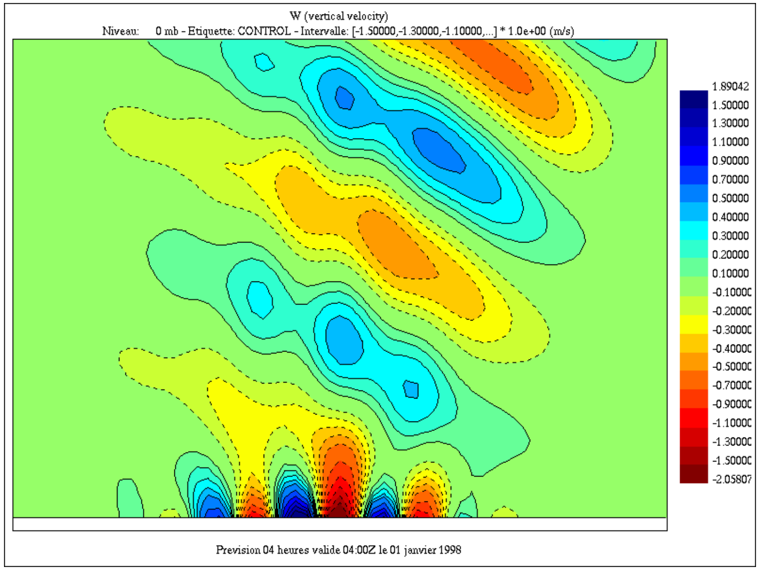
$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -g\rho = -g\frac{p}{RT} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \ln \pi}{\partial z} = -\frac{p}{\pi}\frac{g}{RT}}$$

stabilité obtenue en 2010

b=.5
Δt=32s
λ=1

sans décentrage

avec changement de définition de π



Bosses sans doute dues à une inconsistance reliée à l'advection semi-Lagrangienne

L'onde de 'Schär'

Fin de la préhistoire

avant 2010
solution instable sans décentrage
solution stable <u>avec</u> décentrage mais erronée

depuis 2010
avec nouvelle définition de π
solution stable <u>sans</u> décentrage mais toujours incorrecte

l'hypothèse d'une inconsistance numérique
comme cause du 'bosselage'
devient très plausible

Équation thermodynamique et ondes de gravité internes

$$\boxed{\frac{d\ln T}{dt} - \kappa\frac{d\ln p}{dt} = 0}$$

Commence l'histoire

T_* constant

$$\frac{d\ln p}{dt} = \frac{\omega}{p}$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{T}{T_*}\right) - \kappa\frac{\omega}{p} = 0$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_*}\right) = \ln\left(1 + \frac{T'}{T_*}\right) \approx \frac{T'}{T_*}$$

$$\frac{\omega}{p} \approx -\frac{g\rho w}{p} = -\frac{gw}{RT}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{T'}{T_*}\right) + \frac{g\kappa w}{RT} \approx 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(g\frac{T'}{T_*}\right) + \frac{g^2 w}{c_p T} \approx 0$$

$$b = g\frac{T'}{T_*}$$: bouée

$$\boxed{\frac{db}{dt} + N^2 w \approx 0}$$

$$N^2 = \frac{g^2}{c_p T}$$: fréquence de Brunt-Vaïsälä au carré

relation classique en coordonnée-z

Équation thermodynamique en coordonnée-ζ de *GEM*

L'histoire

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_*}\right)-\kappa\left(Bs+q\right)\right]-\kappa\dot{\zeta}=0}$$

(prononcez zèta ou dzèta)

$$\frac{d\ln T}{dt}-\kappa\frac{d\ln p}{dt}=0$$

$$\ln p=\ln\pi+q \quad\Leftrightarrow\quad q=\ln(p/\pi)$$

$$\ln\pi=\zeta+Bs$$

$$s=\ln(\pi_S/p_{ref})$$

$$\ln\pi=A+Bs$$

T_* constant

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_*}\right)-\kappa\left(Bs+q\right)\right]-\kappa\dot{\zeta}=0$$

$$B=\left(\frac{\zeta-\zeta_T}{\zeta_S-\zeta_T}\right)^{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{T'}{T_*}-\kappa Bs\right)-\kappa\dot{\zeta}\approx 0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(g\frac{T'}{T_*}\right)+N^2w\approx 0$$

$$\frac{N^2}{g}w\approx-\kappa\left(\dot{\zeta}+\frac{dBs}{dt}\right)$$

un terme

deux termes

un beau mélange en coordonnée-ζ

Pourquoi une erreur? D'où provient-elle?

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_*}\right)-\kappa\left(Bs+q\right)\right]-\kappa\dot{\zeta}=0}$$

Il y a 3 termes!

Dans le cas présent, la température varie beaucoup à la verticale:

$$\mathbf{U}=10\,ms^{-1};\qquad \mathbf{N}=0.01\,s^{-1};\qquad T_{\max}=288K;\quad T_{\min}=143K$$

a) Il y a la possibilité d'avoir un atmosphère isotherme:

avec $\mathbf{U}=18.71\,ms^{-1};\ \mathbf{N}=0.01871s^{-1};\qquad T_{\max}=T_{\min}=T_*=273.16\,K$

et en effet , puisque $\frac{T'}{T_*} << 1$, l'erreur disparaît

b) On a vu, aussi: avec $\lambda=10>>1$, l'erreur disparaît même si que la température varie beaucoup

$$\boxed{B=\left(\frac{\zeta-\zeta_T}{\zeta_S-\zeta_T}\right)^{\lambda}}$$

c) Une troisième possibilité: une advection verticale Eulérienne

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)-\kappa\left(Bs+q\right)\right]-\kappa\dot{\zeta}+\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{T_0}{T_*}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)-\kappa\left(Bs+q\right)\right]-\kappa\dot{\zeta}+\dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\left(\frac{T_0}{T_*}\right)=0$$

T_0: température initiale

Inconsistance SLI ?

Discrétisation SLI
Semi-Lagrangienne Implicite

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T}{T_*}\right) - \kappa(Bs+q)\right] - \kappa\dot{\zeta} = 0$$

Il n'y a vraiment que 2 termes!

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} - \kappa\dot{\zeta} = 0}$$

une différence

une moyenne

$$\boxed{\frac{\Gamma_A^+ - \Gamma_D^-}{\Delta t} \quad - \quad \kappa\frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2} = 0}$$

$+$	*futur*
A	Arrivée
$-$	*passé*
D	Départ

Comprendre la discrétisation SLI

L'histoire
$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} - \kappa\dot{\zeta} = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{\Gamma_A^+ - \Gamma_D^-}{\Delta t} - \kappa\frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2} = 0}$$

$$\Gamma_D^- = \Gamma^-(\zeta_D) = \Gamma^-(\zeta_A - \Delta t\dot{\zeta})$$

oubliant l'horizontale

$$= \Gamma^-(\zeta_A) - \Delta t\dot{\zeta}\frac{\partial\Gamma}{\partial\zeta} + \ldots$$

$$\frac{\Gamma_A^+ - \Gamma_A^-}{\Delta t} + \dot{\zeta}\frac{\partial\Gamma}{\partial\zeta} + \ldots - \kappa\frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2} = 0$$

Calcul des trajectoires:

$$\boxed{\frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta}}$$

Règle du point milieu

$$\frac{\zeta_A - \zeta_M}{\Delta t/2} = \frac{\dot{\zeta}_M^+ + \dot{\zeta}_M^-}{2} = \frac{\zeta_A - \zeta_D}{\Delta t}$$

$$\zeta_A - \zeta_D = 2(\zeta_A - \zeta_M)$$

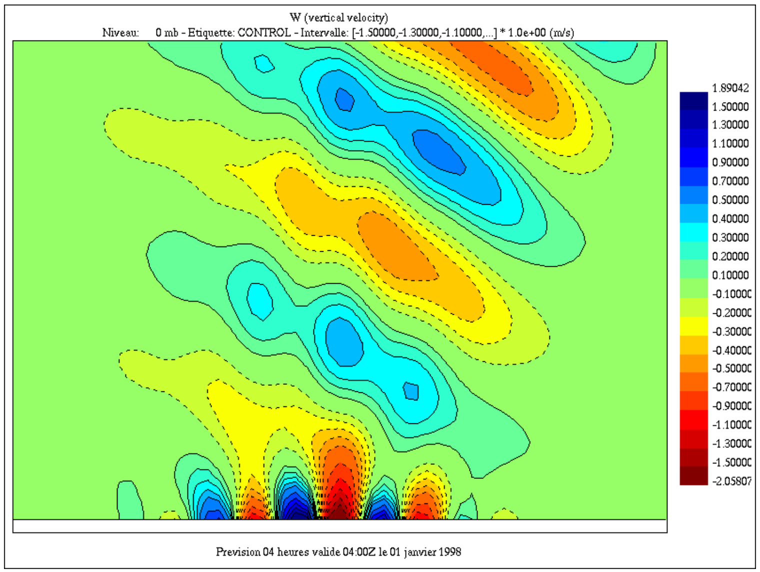
Méthode trapézoidale

$$\frac{\zeta_A - \zeta_D}{\Delta t} = \frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2}$$

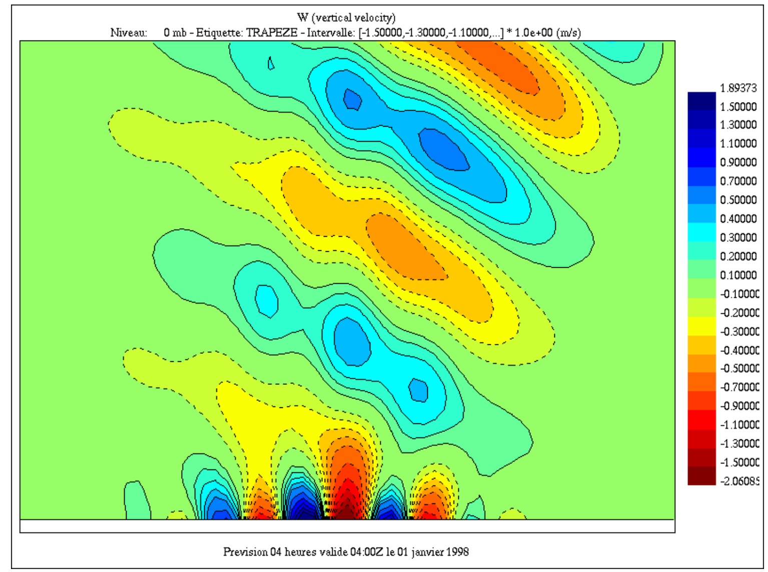
L'onde de 'Schär'

Calcul des trajectoires

Règle du Point Milieu



Méthode Trapézoidale



méthodes équivalentes

Discrétisation SLI

$$\boxed{\frac{\Gamma_A^+ - \Gamma_D^-}{\Delta t} - \kappa \frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2} = 0}$$

Calcul SLI

$$\Gamma_D^- = \Gamma^-(\zeta_D) = \Gamma^-(\zeta_A - \Delta t \dot{\zeta})$$

oubliant l'horizontale

$$= \Gamma^-(\zeta_A) - \Delta t \dot{\zeta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} + \ldots$$

interpolation cubique

$$\frac{\Gamma_A^+ - \Gamma_A^-}{\Delta t} + \dot{\zeta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} + \ldots - \kappa \frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2} = 0$$

Calcul des trajectoires:

$$\boxed{\frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta}}$$

Règle du point milieu

$$\frac{\zeta_A - \zeta_M}{\Delta t / 2} = \frac{\dot{\zeta}_M^+ + \dot{\zeta}_M^-}{2}$$

interpolation linéaire

Méthode trapézoidale

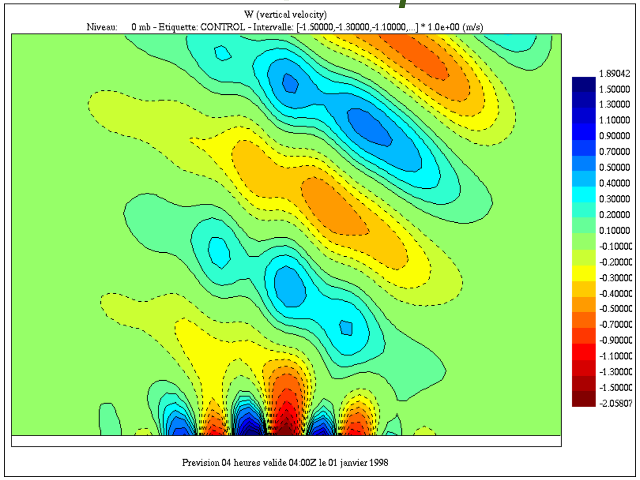
$$\frac{\zeta_A - \zeta_D}{\Delta t} = \frac{\dot{\zeta}_A^+ + \dot{\zeta}_D^-}{2}$$

interpolation linéaire

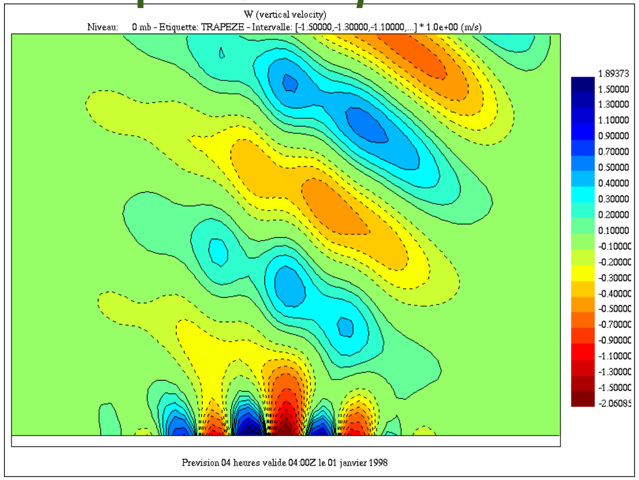
L'onde de 'Schär'

Calcul des trajectoires

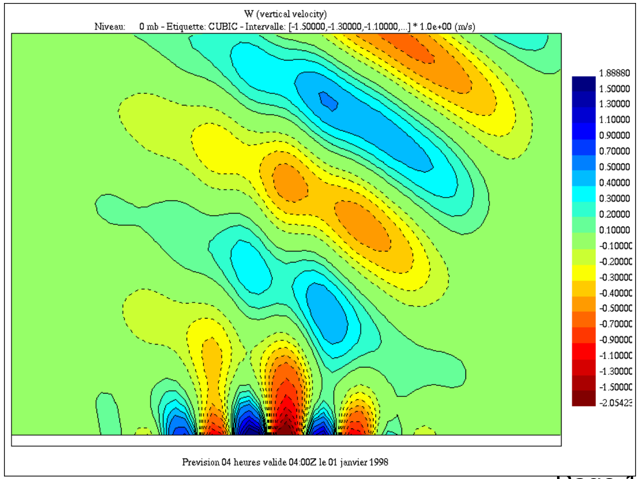
Point Milieu / *interp. linéaire*



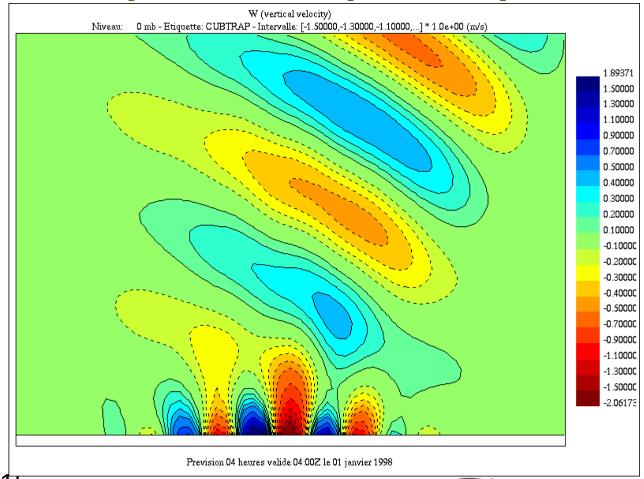
Trapèze / *interp. linéaire*



Point Milieu / *interp. cubique*



Trapèze / *interp. cubique*



Impact d'une inconsistance résolue

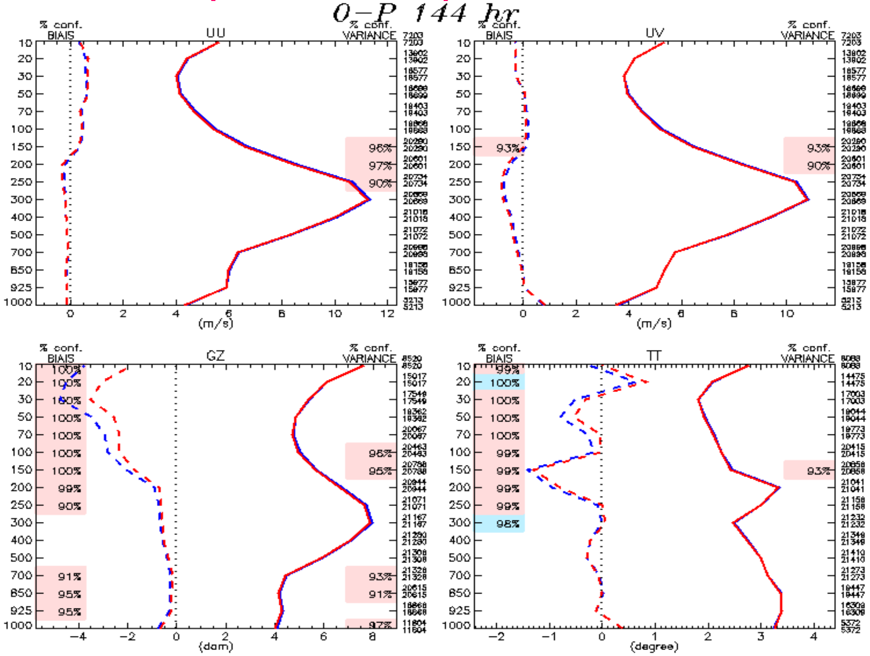
Scores globaux
44 cas d'hiver
Prévisions de 6 jours

Gem Yin-Yang Résolution: 15 km

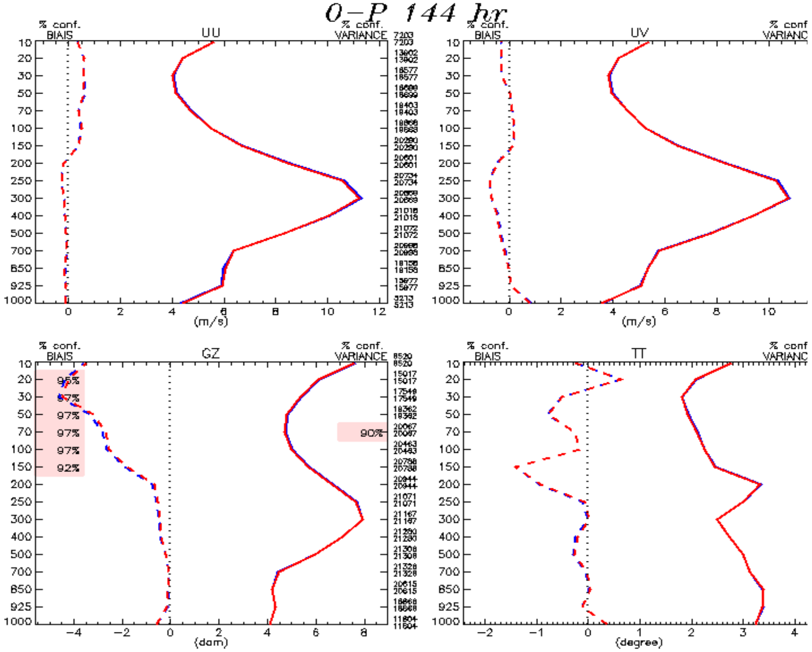
Calcul des trajectoires

Bleu: Point Milieu / *interp. linéaire*
Rouge: Variations (ps_adjust)

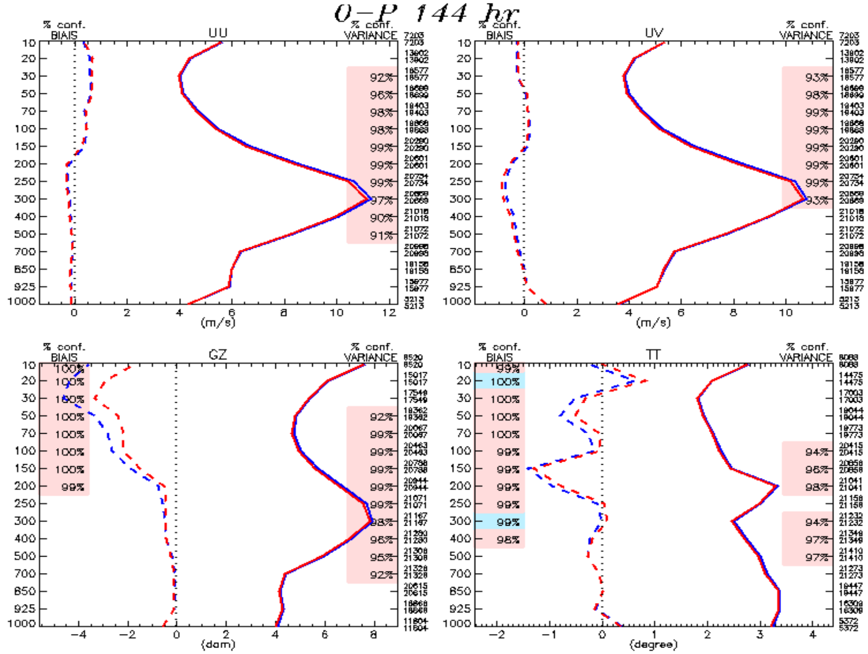
Trapèze / *interpolation linéaire*



Point Milieu / *interpolation cubique*



Trapèze / *interpolation cubique*



résumé & conclusion

Ici, on a vu que:

La solution de l'onde de 'Schär' convergeait trop lentement lorsqu'on diminuait Δt

Un système d'équations numériques est inconsistant lorsque
la solution ne converge **pas ou mal** vers la vraie solution.

Plusieurs éléments étaient nécessaires à la convergence:

stabilité
+ même méthode de moyennage: trapézoidale
+ même ordre d'interpolation: cubique
+ absence de décentrage

L'impact pour GEM, un modèle complexe, cependant toujours avec décentrage,
n'est pas aussi négligeable qu'attendu!
Il est plutôt positif en fait!